Hankel Tekil Değerlerinin Sembolik Hesabı ve Doğrusal Sistemin Statik Kazancının İncelenmesi

Âli Yurdun Orbak

Mühendislik-Mimarlık Fakültesi
Endüstri Mühendisliği Bölümü
Uludağ Üniversitesi
orbak@uludag.edu.tr, orbak@alum.mit.edu

Özet

Bu bildiride kontrol teorisinde sıkça kullanılan ve sistemin durumlarının enerji değeri hakkında bilgi veren Hankel tekil değerlerinin sembolik hesaplanması ve doğrusal sistemlerin statik kazançlarının Hankel tekil değerlerinin yardımıyla incelenmesi ile sistem hakkında daha fazla bilgi edinilmesinin sağlanması amaçlanmıştır. Bu şekilde elde edilen sonuçlar modellerin indirgenmesi için kullanılan birçok dengeleme yönteminin daha iyi hale getirilmesinde kullanılacaktır. Sonuçlar ikinci mertebeden basit bir sistem üzerinde detaylandırılmıştır.

Abstract

In this paper, the symbolic calculation of commonly used Hankel singular values that provide a measure on energy levels of a system's states is given. Additionally, it is shown that calculating and examining the static gain values using Hankel singular values provide further information about a system's response and characteristics. The results can be used in many model order reduction techniques and can also improve some of the existing methods. A simple second order system is used as an example to illustrate the results.

1. Giriş

Kontrol teorisinde Hankel tekil değerleri sistemdeki durumların her birinin enerjisi hakkında bilgi veren bir büyüklüktür [1, 2, 3]. Bu değerler özellikle dengeli model indirgenmesi gibi yöntemlere temel teşkil etmektedirler [1]. Dengeli model indirgenmesinde yüksek enerjiye sahip olan durumlar korunmakta ve düşük enerji seviyesine sahip durumlar atılmaktadır [4, 5, 6]. Bu şekilde indirgenmiş sistem orijinal modelin statik kazancı da dâhil olmak üzere önemli özelliklerine sahip olmaktadır [5]. Literatürde özellikle Hankel tekil değerlerinin toplamının doğrusal bir sistemin kazancının yarısına eşit olduğu belirtilmektedir [1]. Bu sonuç çoğu sistem için nümerik açıdan geçerli gibi görünse de aslında bazı koşullar belirlenmeden genelleştirilemeyecek ve doğru sonucu veremeyecektir. Bu bildiride hem bu konu irdelenmiş ve hem de Hankel tekil değerleri literatürde çoğu kullanımının aksine nümerik olarak değil sembolik olarak hesaplanarak doğrusal bir sistemin kazancına olan ilişkisi açıklanmıştır.

Bu amaçla ikinci bölümde Hankel tekil değerlerinin hesaplanma yöntemi verilmiş ve bu değerlerin yine kontrol teorisinde çok sık olmasa da kullanım alanı bulmuş Kronecker cebri ile hesaplanması detaylandırılmıştır. Üçüncü bölümde gerçek ve ayrık özdeğerlere sahip olan ikinci dereceden doğrusal bir sistem için ayrıntılı hesaplama verilmiş ve dördüncü bölümde elde edilen sonuçlar irdelenmiştir.

2. Kontrol edilebilirlilik, gözlenebilirlik ve çapraz gramian matrisleri

Zamandan bağımsız doğrusal bir sistem aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}\,,\ \mathbf{x}_{t_0} = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \tag{2}$$

Burada **A**, **B**, **C**, **D** uygun boyutlu sistem matrisleridir. Ayrıca sistemin n boyutlu, p girişli ve m çıkışlı bir sistem oldu düşünülebilir.

Bilindiği gibi bu gösterimden bir transfer fonksiyonu matrisi aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{3}$$

Bu tartışmanın devamında herhangi bir kayıp olmadan $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ olarak alınacaktır.

Sistem teorisinden bilindiği gibi eğer (**A**,**B**) tamamen kontrol edilebilir ve (**A**,**C**) tamamen gözlenebilir ise **A** matrisi minimum boyutludur. Bu durumda (**A**,**B**,**C**) üçlüsüne **G**(s)'in minimum gerçeklenmesi adı verilir.

Bir sistemin kontrol edilebilirliğini ve gözlenebilirliğini analiz etmenin bir yolu gramian matrislerinin tekil değerlerini analiz etmektir. Bu yöntem sistem hakkında bazı ipuçları edinmemizi sağlar. Örneğin kontrol edilebilirlik gramianının nispeten küçük tekil değerlerinin sayısı sistemdeki kontrol edilebilirliği düşük durumların sayısını vermektedir. Gramianların bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir.

(1) ve (2) denklemleri ile verilmiş bir sistemin kontrol edilebilirlik gramianı, **P**, aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t}dt \tag{4}$$

Benzer şekilde gözlenebilirlik gramianı, **Q**, ise

$$\mathbf{Q} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}dt \tag{5}$$

şeklinde hesaplanır. Bu hesaplama yöntemi integral işlemini içerdiğinden zaman alan bir yöntemdir. Literatürde bu matrislerin Lyapunov denklemleri kullanılarak hesabı verilmektedir [1, 6]:

$$\mathbf{AP} + \mathbf{PA}^T + \mathbf{BB}^T = \mathbf{0} \tag{6}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Q} + \mathbf{QA} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{0} \tag{7}$$

Bu noktada şu sonucu belirtmek gerekmektedir. Eğer sistem asimptotik olarak dengede ise Lyapunov denklemlerinin tek bir çözümü vardır, sistem minimaldir, ayrıca **P** ve **Q** matrisleri tekil olmaz. Gramianların pozitif kesin karakterleri bazı önemli bilgiler içermektedir:

- $\mathbf{P} > \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{A},\mathbf{B})$ tamamen kontrol edilebilirdir,
- $\mathbf{Q} > \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{A},\mathbf{C})$ tamamen kontrol gözlenebilirdir.

Yukarıdaki bilgiler bir sistemin kontrol edilebilirliğini ve gözlenebilirliğini daha güvenilir bir şekilde yapılmasını sağlamaktadır. Temel olarak **P** kontrol edilebilirlilik gramianındaki bir sıfır özdeğer (**A**,**B**)'nin kontrol edilemeyeceğini ve **Q** gözlenebilirlik gramianındaki bir sıfır özdeğer ise (**A**,**C**)'nin gözlenemeyeceğini belirtmektedir. Bu iki temel gramian matrisine ek olarak 1983 yılından beri hem kontrol edilebilirlik ve hem de gözlenebilirlik hakkında bilgi içeren "çapraz gramian matrisi", $\mathbf{W}_{co}$, kavramı geliştirilmiştir [3]. Bu gramian matrisi de Lyapunov denklemi yardımıyla benzer şekilde hesaplanmaktadır [3, 6].

2.1. Hankel Tekil Değerleri

Bir transfer fonksiyon matrisi **G**(s)'in Hankel tekil değerleri kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik gramianlarının çarpımının (**PQ**) özdeğerlerinin (λ_i) karekökü olarak tanımlanmaktadır [2, 3]:

$$\sigma_{HSV}\{\mathbf{G}\} = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{PQ})},\ i = 1,\ldots,n \tag{8}$$

Gramian matrisleri pozitif kesin matrisler olduklarından (**PQ**) çarpımının özdeğerleri de kesin olarak pozitiftir, yani $\sigma_{HSV_i} > 0$. Bu değerler genellikle $\sigma_{HSV_1} \geq \sigma_{HSV_2} \geq \cdots \geq \sigma_{HSV_n} \geq 0$ şeklinde sıralı olarak verilirler. Denklem (8)'den anlaşılabileceği gibi Hankel tekil değerleri tüm sistemin transfer fonksiyon matrisindeki durumlarının önemi hakkında bir ölçü vermektedir [2].

2.2. Kronecker Cebri

Bu bölümde sistem teorisinde kullanım alanı bulmuş Kronecker cebri hakkında özet bilgi verilecektir.

Boyutu (p×q) olan bir **A** matrisi ile boyutu (m×n) olan bir **B** matrisinin Kronecker çarpımı **A**⊗**B** olarak gösterilir ve boyutu (pm×qn) olan bu matris aşağıdaki gibi hesaplanır [7, 8, 9]:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1q}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{p1}\mathbf{B} & & & a_{pq}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Ayrıca (n×n) boyutlu **N** matrisi ile (m×m) boyutlu **M** matrisinin Kronecker toplamı [8] aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\mathbf{N} \oplus \mathbf{M} = \mathbf{N} \otimes \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{M} \tag{10}$$

Son olarak bir matrisin önemli olan vektör değerli fonksiyonu Neudecker [9] tarafından aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$\underset{(pq\times 1)}{vec(\mathbf{A})} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{.1} \\ \mathbf{A}_{.2} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{.q} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Kronecker cebri hakkında daha fazla bilgi [6-9]'dan elde edilebilir.

2.3. Kronecker Cebri İle Gramian Matrislerinin Hesabı

Bir önceki bölümde verilen Kronecker cebri kullanılarak kontrol edilebilirlik, gözlenebilirlik ve çapraz gramianlar aşağıdaki gibi elde edilir [6]:

$$vec(\mathbf{P}) = -[\mathbf{I} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}]^{-1} vec(\mathbf{BB}^T) \tag{12}$$

$$vec(\mathbf{Q}) = -[\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I}]^{-1} vec(\mathbf{C}^T\mathbf{C}) \tag{13}$$

$$vec(\mathbf{W}_{co}) = -[\mathbf{I} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I}]^{-1} vec(\mathbf{BC}) \tag{14}$$

Kronecker cebri ile elde ettiğimiz (12)-(14) deklemlerinden özellikle denklem (14) ikinci derece sistemler için aşağıda açıklanan sonucu vermektedir.

Şimdi çapraz gramianı kararlı, ikinci mertebeden gerçek ve ayrık özdeğerleri olan Jordan formunda bir sistem için hesaplayalım. Böyle bir sistemin durum uzayı gösterimi aşağıda verilmiştir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Bu gösterimde λ_1 ve λ_2 özdeğerleri ve R_1 ve R_2 sırasıyla karşılık gelen kalanları belirtmektedir. Denklem (15)den görüldüğü gibi $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ olduğundan (14) denklemindeki hesaplama aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} vec(\mathbf{W}_{co}) &= -[\mathbf{I} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I}]^{-1} vec(\mathbf{BC}) \\ &= -(\mathbf{A} \oplus \mathbf{A}) vec(\mathbf{BC}) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

O halde,

$$\mathbf{W}_{co} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{2\lambda_1} & -\frac{R_2}{\lambda_1+\lambda_2} \\ -\frac{R_1}{\lambda_1+\lambda_2} & -\frac{R_2}{2\lambda_2} \end{bmatrix} \tag{19}$$

şeklinde bulunacaktır.

Denklem (19) incelendiğinde

$$2 \times trace(\mathbf{W}_{co}) = -\sum_{i=1}^{2} \frac{R_i}{\lambda_i} \tag{20}$$

olduğu görülmektedir. Bu değer sistemin statik kazancıdır. Ayrıca çapraz gramianın özdeğerleri "karşılık gelen işaretleri" ile Hankel tekil değerlerini vermektedir. Bu "işaret" olmadan doğrudan matematiksel yöntemlerle tekil değerlerin hesaplanması durumunda literatürde belirtilen Hankel tekil değerlerinin toplamı sistemin statik kazancının yarısıdır argümanı geçerli olmayacaktır.

3. Sayısal Örnek

Bu bölümde önceki bölüme anlatılanlar basit bir sayısal örnek üzerinde gerçeklenecektir. Aşağıdaki transfer fonksiyonu ile verilmiş ikinci dereceden sistem göz önüne alınsın:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} \tag{20}$$

Bu sistemin Jordan formunda durum uzayı gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Bu sistemin çapraz gramian matrisi kullanılarak elde edilen Hankel tekil değerleri sırasıyla 0,1129 ve −0,0295'tir. Bu değerler ile (20) denklemi sağlanmaktadır. Ayrıca bu sistemin statik kazancı doğru bir şekilde [0,1129+(−0,0295)]/2 = 0,1667 olarak hesaplanır. Eğer Hankel tekil değerleri burada anlatılan "işaret"'e dikkat edilmeden doğrudan Matlab gibi bir paket program ile hesaplanırsa elde edilecek değerler literatürde de belirtildiği gibi pozitif 0,1129 ve 0,0295 değerleri olacaktır. Bu değerler kullanılarak doğru statik kazancın hesaplanamayacağı açıktır.

4. Sonuçlar

Bu bildiride Hankel tekil değerlerinin çapraz gramian kullanılarak elde edilmesinden yola çıkılarak doğrusal sistemlerin statik kazancının hesaplanmasının Hankel tekil değerlerinin literatürde genellikle belirtilenin aksine bir "işaretle" ifade edilmesinin gerekliliğine değinilmiştir. Bu işaretin oluşturulabilmesi için doğrusal sistemin Jordan formundan faydalanılarak çapraz gramian sembolik olarak hesaplanmış ve böylece özvektörlerin işaretinin aynı zamanda Hankel tekil değerlerinin işareti olacağı belirtilmiştir. Elde edilen sonuç sayısal bir örnekle pekiştirilmiştir. Sonuçların çeşitli model indirgenmesi yöntemlerinde kullanılması amacıyla yapılan araştırmalar devam etmektedir.

5. Kaynakça

[1] A. M. Davidson, "Balanced systems and model reduction," *Electronics Letters*, Cilt: 22, No: 10, s: 531–532, 1986.

[2] B. C. Moore, "Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Cilt: AC-26, No: 1, s: 17–32, 1981.

[3] K. V. Fernado ve H. Nicholson, "On the structure of balanced and other principal representations of SISO systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Cilt: AC-28, No: 2, s: 228–231, 1983.

[4] A. Varga, "Enhanced modal approach for model reduction," *Mathematical Modelling of Systems*, Cilt: 1, s: 91–105, 1995.

[5] Â. Y. Orbak, Physical Domain Model Reduction for Design and Control of Engineering Systems, Mech.E. Tezi, Makine Mühendisliği Bölümü, Massachusetts Institute of Technology, Haziran 1998.

[6] Â. Y. Orbak, Physical Based Analysis and Model Reduction of Engineering Systems, Doktora Tezi, Makine Mühendisliği Bölümü, Boğaziçi Üniversitesi, 2003.

[7] R. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1960.

[8] H. Neudecker, "A Note on Kronecker Matrix Products and Matrix Equation Systems," *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Cilt: 17, 1969.

[9] H. Neudecker, "Some Theorems on Matrix Differentiation with Special Reference to Kronecker Matrix Products," *Journal of American Statistics Association*, Cilt: 64, s: 953–963, 1969.