

ÖZDEĞER/ÖZVEKTÖR ANALİZİ İLE FİZİKSEL MODEL İNDİRGENMESİ

Â. YURDUN ORBAK

Uludağ Üniversitesi
Mühendislik-Mimarlık Fakültesi
Endüstri Mühendisliği Bölümü
Bursa
orbak@alum.mit.edu

Özet

Akademide ve endüstride eldeki tüm sistemin verilen bir özdeğerini tanımlayan sistem parçacıklarını veya bileşenlerini belirlemek önemli bir konudur. Bu belirlemenin iyi bir şekilde ve belirli adımlarla yapılması hem sistemin tekrar tasarımında ve hem de model indirgenmesi gibi problemlerde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Bu bildiride bir seri teoremin yardımıyla yukarıda açıklanan belirlemeyi gerçekleştirecek özdeğer/özvektör analizini kullanan bir yöntem gösterilecek ve model indirgenmesi problemine katkısı işlenecektir. İşlemler ve yöntem yüksek verim almak için bond çizge metodu ile yapılmıştır.

1. Giriş

Fiziksel sistem bileşenleri ve sistemin dinamik davranışı arasında ilişki kurabilme son zamanlarda gündemde olan önemli bir konudur. Bir ilişkilendirme yapılabildiğinde, hem sistemin dinamik davranışı parametrelerinin uygun seçimiyle istenilen şekilde değiştirilebilmekte ve hem de sistem kullanıcı tarafından daha iyi analiz edilebilmektedir. Bu sayede sistem tasarımı ve model indirgenmesi gibi önemli problemlere yeni bir bakış açısı getirilebilmektedir.

Yukarıda belirtilen ilişkinin kurulabilmesi probleminin kolaylıkla çözülememesinin belkide en önemli nedeni problemin matematiksel olarak çok zor olmasıdır. Gerçektende altıncı ve daha yüksek mertebeden sistemlerin özdeğerlerini parametrelerinin analitik bir fonksiyonu olarak yazabilmek teorik olarak imkansızdır. Bunun yanı sıra duyarlılık analizi, köklerin geometrik yeri teknikleri gibi ilgili yöntemler literatürde mevcuttur. Ancak bu yöntemlerin de bazı problemleri vardır. Örneğin duyarlılık analizleri sadece küçük değişimlerin incelenebilmesini sağlarlar [Decarlo 1981]. Öte yandan köklerin geometrik yeri yöntemleri sadece verilen bir sistem parçacığının öneminin belirlenmesine yardımcı olurlar ve sistemin özdeğerine olan bileşen etkisini belirleyemezler [Robertson 1997].

Son zamanlarda yapılan araştırmalarda sistemin bond çizge yöntemi [Karnopp 1990] kullanılarak model-özdeğer ilişkisi çıkarılmış ve bu yöntem ile model indirgenmesi ve tasarım problemleri fiziksel alanda çözülmeye çalışılmıştır [Huang 1997, Orbak 1998, Orbak 2001].

Bu bildiride, yine bond çizge yönteminin özelliklerinden ve özdeğer/özvektör ayrıştırmasından faydalanılarak, sistemin verilen bir özdeğerine etki etmeyen sistem bileşenlerinin bulunması ve bu yöntemle model indirgenmesinin prensipleri açıklanacaktır.

2. Özdeğere Etki Eden Bileşenlerin Belirlenmesi

Bu bölümde LTI bir sistemin verilen bir özdeğerine etki eden sistem bileşenlerinin bulunması için gerekli temeller ve yöntemler açıklanacaktır. Bu bildiride bileşenin "etki etmemesi", bileşenin rastgele pozitif değeri için özdeğerin sayısal değerinin değişmemesi anlamını taşımaktadır. Fiziksel olarak ise, bileşenin etki etmemesi, bileşen değeri sıfır alınabileceğinden, bileşenin özdeğere etki etmeden sistemden kaldırılabilmesi anlamını taşımaktadır. Bu bölümde önce enerji biriktirme elemanlarının etkisini gösteren iki teorem verilecek ve daha sonra da enerji dağıtıcı elemanların etkisi bir başka teoremle açıklanacaktır. Son olarak da bir özdeğere etki etmeyen bileşenlerin bulunabilmesi için bir yöntemin adımları verilecektir [Ye 2000].

Bu bildiride, bağımsız atalet/sığa elemanlarının genelleştirilmiş momentum/genelleştirilmiş yerdeğiştirmeleri durum değişkenleri olarak seçilecektir. Bundan sonraki bölümlerde sistemdeki bağımsız enerji biriktirme elemanı sayısı n , ve sistemin durum vektörü $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ olarak belirtilecektir.

2.1. LTI Sistemin Durum Uzayı Gösterimi

Bu bölümde LTI bir sistemin durum uzayı gösteriminin bilinen fiziksel bir yolu kısaca açıklanacaktır [Rosenberg 1971]. Fiziksel sistemlerdeki elemanların başlıcaları atalet (I), sığa (C) ve dağıtıcı (R)'dir.

Bir LTI sistem, parametrelerini ve yapısını belirten çeşitli matrislerle belirtilebilir. Bileşenlerin parametreleri iki matris ile verilir, bunlardan biri S ile ifade edilen ve enerji biriktirme elemanlarının parametrelerini içeren matristir. $\mathbf{z} = S\mathbf{x}$ ile belirtilir. Burada x_i , i 'inci bağımsız enerji biriktirme elemanı ile ilgili olan genelleştirilmiş momentum/yer değiştirme, ve z_i aynı elemanın nedensel çıkışı olan akım/çaba'dır. Bütün bağımsız enerji biriktirme elemanları bir girişli olan LTI sistemlerde S diagonaldir ve $\text{diag}[s_1, \dots, s_n]$ biçiminde ifade edilir. Burada s_i enerji biriktirme elemanının parametresidir. Özellikle, eğer i 'inci enerji biriktirme elemanı sığa (veya atalet) ise $s_i = \frac{1}{C_i}$ (veya karşılıklı olarak $s_i = \frac{1}{I_i}$) olarak verilir.

Diğer bileşen parametreleri matrisi $\mathbf{L}$, $\mathbf{d}_c = \mathbf{L}\mathbf{d}_g$ olarak verilir ve enerji dağıtıcı elemanların parametresini içerir. Burada d_{g_i} ve d_{c_i} sırasıyla j 'inci enerji dağıtıcı elemanının nedensel giriş ve çıkışını tanımlamaktadır. m tane bir girişli enerji dağıtıcı elemanı olan bir LTI sistem için $\mathbf{L}$ diagonaldir ve $\text{diag}[l_1, \dots, l_m]$ biçimindedir. Özellikle, j 'inci enerji dağıtıcı eleman nedensel giriş olarak akış ve nedensel çıkış olarak çaba alıyorsa $l_j = R_j$ dir. Aynı şekilde j 'inci enerji dağıtıcı eleman nedensel giriş olarak çaba ve nedensel çıkış olarak akış alıyorsa $l_j = \frac{1}{R_j}$ dir.

Bu bilgilerden sonra sistemin yapısı aşağıdaki matrislerle verilebilir:

- J_{SS} enerji biriktirme elemanlarının çıkışları ve girişleri arasındaki bağlantıyı verir.
- J_{SL} enerji biriktirme elemanlarının girişleri ile enerji dağıtıcı elemanların çıkışları arasındaki bağlantıyı verir.
- J_{LS} enerji biriktirme elemanlarının çıkışları ile enerji dağıtıcı elemanların girişleri arasındaki bağlantıyı verir (bu tanıma göre $J_{LS} = -J_{SL}^T$ yazılabileceği açıktır).
- J_{LL} enerji dağıtıcı elemanların girişleri ve çıkışları arasındaki bağlantıyı verir.
- J_{SU} sistemin girişleri u ile kaynakların girişleri arasındaki bağlantıyı verir.
- Ve son olarak J_{LU} sistemin girişleri u ile enerji dağıtıcı elemanların girişleri arasındaki bağlantıyı verir.

Bu matrisler ile şu denklemler yazılabilir [Rosenberg 1971]:

$$\dot{x} = J_{SS}z + J_{SL}d_{out} + J_{SU}u \quad (1)$$

$$d_g = J_{LS}z + J_{LL}d_c + J_{LU}u \quad (2)$$

Sistemin durum uzayı denklemleri $\dot{x} = Ax + Bu$ 'dur ve (1) ve (2) yardımıyla A ve B matrisleri şu şekilde hesaplanır:

$$A = \begin{bmatrix} J_{SS} + J_{SL}L(I - J_{LL}L)^{-1}J_{LS} \\ JS \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$B = J_{SU} + J_{SL}L(I - J_{LL}L)^{-1}J_{LU} \quad (4)$$

Bu fiziksel temelli durum uzayı gösteriminde özellikle (3) ile ifade edilen A matrisinin yapısının çeşitli hesaplamalarda kolaylıklar sağlayacağı açıktır. Çünkü sistem parametrelerini içeren S matrisi ve sistem bileşenlerinin birbirleri ile bağlanmalarını ifade eden J matrisi birbirleriyle çarpılarak A matrisini oluşturmaktadır. Sonraki alt bölümde bu özellik kullanılarak bir seri teorem verilecektir.

2.2. Teoremler

Bu alt bölümde enerji biriktirme ve enerji dağıtma elemanlarının özdeğerlere etkisini gösteren teoremler verilecektir [Ye 2000].

Teorem 1 i 'inci modun (özdeğerin) sağ özvektörünün sıfır bileşenlerine karşılık gelen enerji biriktirme elemanları i 'inci özdeğere etki etmezler.

Teorem 2 i 'inci modun sol özvektörünün sıfır bileşenlerine karşılık gelen enerji biriktirme elemanları i 'inci özdeğere etki etmezler.

Teorem 3 Bir enerji dağıtma elemanının nedensel girişleri i 'inci özdeğere etki etmeyen enerji biriktirme elemanlarının bir doğrusal kombinasyonu şeklinde ise, o enerji dağıtma elemanı i 'inci özdeğere etki etmez.

Yukarıdaki teoremlerin ispatları A matrisinin yapısına dayanmaktadır ve [Ye 2000]'de bulunabilir.

Şimdi yukarıdaki teoremlerin yardımıyla bir özdeğere etki etmeyen bileşenlerin bulunması amacıyla bir yöntem açıklanacaktır.

2.3. Yöntem

Önceki alt bölümde verilen üç teoremin yardımıyla bir özdeğere etki etmeyen bileşenlerin bulunabilmesi için bir yöntem aşağıdaki gibi yazılabilir [Ye 2000]:

1. Özdeğer λ_i ile ilgili olan sağ ve sol özvektörler elde edilir.
2. Sağ ve sol özvektörlerin sıfır bileşenlerine karşılık gelen enerji biriktirme elemanları belirlenir.
3. Girişleri ikinci adımda bulunan enerji biriktirme elemanlarının çıkışlarının doğrusal kombinasyonu olan enerji dağıtıcı elemanlar belirlenir. Bu belirleme şu ara adımlarla yapılabilir:
 - 3.1. Her bir enerji dağıtıcı eleman için çıkışından itibaren her bir dal bir enerji biriktirme elemanına veya kaynağa ulaşmaya kadar nedensel yol izlenir.
 - 3.2. Eğer nedensel yolun dalları ile ulaşılan her enerji biriktirme elemanı sağ veya sol özvektörün sıfır bileşenlerine karşılık geliyorsa, enerji dağıtıcı elemanın girişi bu enerji biriktirme elemanlarının doğrusal bir kombinasyonudur.
4. İkinci ve üçüncü adımdaki elemanlar toplanır. Bu elemanlar verilen λ_i özdeğerine etki etmezler.

3. Model İndirgenmesi

Önceki bölümde verilen yöntem aşağıdaki gibi geliştirilerek model indirgenmesinde, özellikle fiziksel model indirgenmesi yönteminin [Orbak 2001] doğrudan kullanılamayacağı, eş parametre, eş yerel döngü kazançları gibi durumlarda etkin bir biçimde kullanılabilir:

1. Öncelikle verilen veya seçilen bir özdeğere etki etmeyen bileşenler bulunur.
2. Bulunan bileşenler toplanırken bu bileşenlerle sistemin enerji biriktirme elemanları arasında nedensel bir yol olup olmadığına bakılır.
3. Aralarında nedensel bir yol olan elemanlar fiziksel model indirgeme metodu da göz önüne alınarak [Orbak 2001] bir sistem parçacığına konulur.
4. Sistemin girişi de gözönüne alınarak kalıntıları hesaplanır. Mutlak değeri en yüksek olan (çok girişli – çok çıkışlı sistemlerde herhangi bir norm kullanılabilir) kalıntılara karşılık gelen özdeğerler verilen giriş için sistemin en çok uyarılan ve dolayısıyla en önemli olan özdeğerleridir.
5. Bu özdeğere karşılık gelen sistem parçacığı indirgenmiş model olarak seçilir.

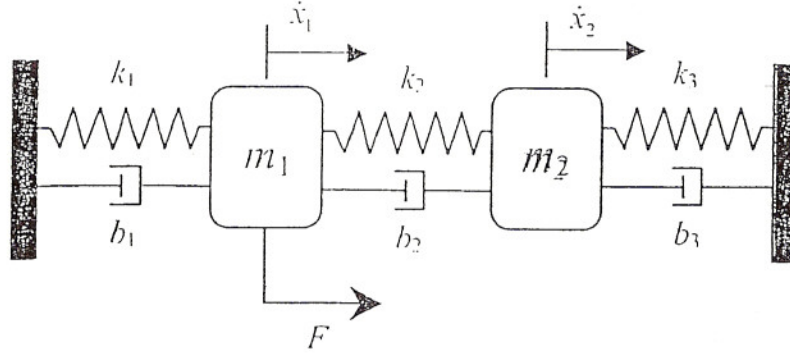
Dikkat edilecek olursa, bu bildiride verilen teoremler ile özellikle parameter değerleri büyüklük olarak birbirine yakın veya aynı olan sistemlerde en uygun fiziksel indirgenmiş model elde edilebilir. Sonraki bölümde bu model indirgeme yöntemi bir fiziksel sisteme uygulanacaktır.

4. Örnek

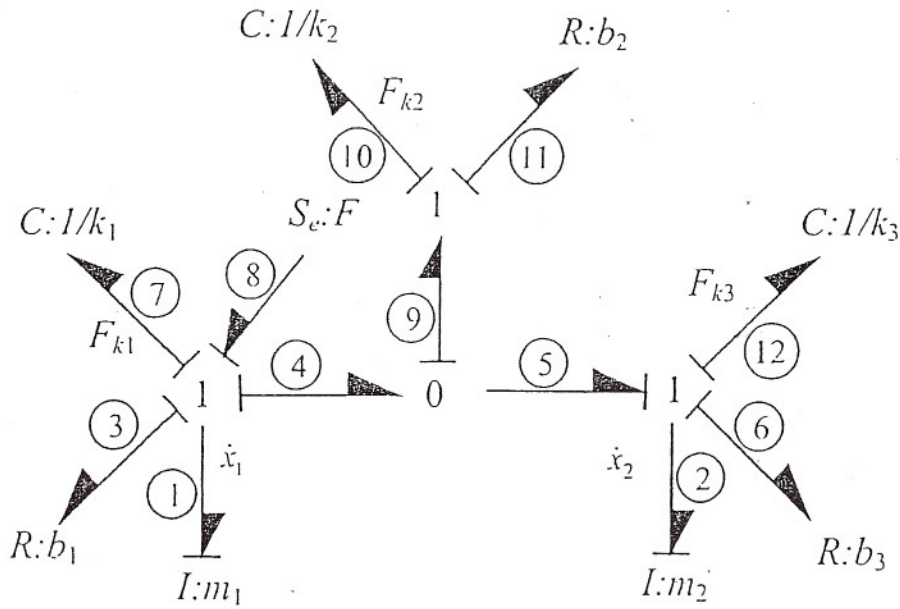
Bu bölümde önceki bölümlerde verilen yöntemleri açıklayıcı bir örnek verilecektir.

Şekil 1'deki mekanik sistemi ve verilen numaralandırılmış bond çizgesini (Şekil 2) gözönüne alalım [Orbak 1998]. Bu bildiride benzetim parametreleri için şu değerler alınmıştır:

$$m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}, k_1 = k_3 = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}, k_2 = 15 \frac{\text{N}}{\text{m}}, b_1 = b_3 = 0.2 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}, b_2 = 1 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}.$$



Şekil 1 Bir LTI sistem.



Şekil 2 LTI sistemin numaralandırılmış bond çizgesi.

Bu LTI sistemin durum uzayı denklemleri bu bildiride verilen fiziksel yöntem ile şu şekilde hesaplanabilir:

Enerji biriktirme elemanları 1, 2, -7, -10, -12 olarak ve enerji dağıtıcı elemanlar 3, 6, 11 olarak numaralandırılacak olursa (- işareti çabanın nedensel yolundan kaynaklanmaktadır), (1) ve (2)'de ifade edilen matrisler şu şekilde bulunur:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad J_{SS} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$J_{SL} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{LS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{LL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Sonuç olarak sistemin A matrisi (3)'teki hesaplama ile

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{b_1+b_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_2} & -k_1 & -k_2 & 0 \\ \frac{b_2}{m_1} & -\frac{b_2+b_3}{m_2} & 0 & k_2 & -k_3 \\ \frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & -\frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

olarak elde edilir.

A matrisi, verilen parametre değerleri ile gerçekleşirse, sistemin özdeğerleri ve özvektörleri Matlab ile aşağıdaki gibi bulunur:

$$\text{Özdeğerler: } -1.1000 \pm 5.4580i, -0.1000 \pm 0.9950i, 0 \quad (8)$$

Sağ özvektörler matrisi:

$$M = \begin{bmatrix} -0.1530-0.6576i & -0.1530+0.6576i & -0.2102+0.4537i & -0.2102-0.4537i & 0 \\ 0.1530+0.6576i & 0.1530-0.6576i & -0.2102+0.4537i & -0.2102-0.4537i & 0 \\ -0.1104+0.0503i & -0.1104-0.0503i & 0.4724+0.1638i & 0.4724-0.1638i & -0.7063 \\ -0.2207+0.1005i & -0.2207-0.1005i & 0 & 0 & 0.0471 \\ 0.1104-0.0503i & 0.1104+0.0503i & 0.4724+0.1638i & 0.4724-0.1638i & 0.7063 \end{bmatrix} \quad (9)$$

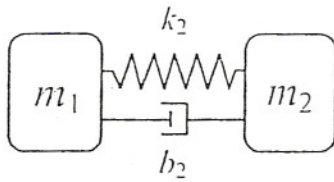
Sol özvektörler matrisi:

$$W = \begin{bmatrix} -0.1566-0.3437i & -0.1566+0.3437i & -0.1646+0.4748i & -0.1646-0.4748i & 0 \\ 0.1566+0.3437i & 0.1566-0.3437i & -0.1646+0.4748i & -0.1646-0.4748i & 0 \\ -0.0661+0.0154i & -0.0661-0.0154i & 0.4559+0.2113i & 0.4559-0.2113i & -0.6851 \\ -1.9823+0.4611i & -1.9823-0.4611i & 0 & 0 & 0.6851 \\ 0.0661-0.0154i & 0.0661+0.0154i & 0.4559+0.2113i & 0.4559-0.2113i & 0.6851 \end{bmatrix} \quad (10)$$

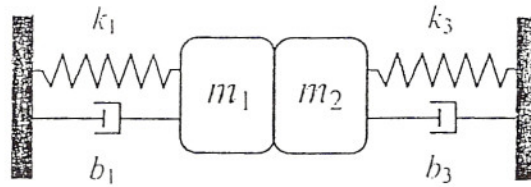
Önceki bölümlerde verilen teoremlere göre şu sonuçlar elde edilir:

- $-1.1000 \pm 5.4580i$ özdeğeri (modu) için $\Rightarrow$ Bütün elemanlar etkilidir.
- $-0.1000 \pm 0.9950i$ özdeğeri (modu) için $\Rightarrow k_2$ elemanı etkili değildir.

Bu sonuçlara ve bölüm 3'deki model indirgemesi yöntemine göre sistem Şekil 3'deki iki sistem parçasına ayrılabilir. Burada özellikle $-0.1000 \pm 0.9950i$ özdeğerine k_2 elemanının etki etmemesinin belirlenmesinden sonra bond çizgesi üzerinden nedensel yollar ile birinci sistem parçasının oluşturulması önem taşımaktadır. Bir başka önemli nokta ise, iki modu bulunan bu sistem için elde edilmiş bulunan bu iki sistem parçasının sistemin parametere değerleri değiştirildiğinde de aynen geçerli olmasıdır. Yani sistemin parametreleri yada döngü kazançları birbirine çok yakın veya aynı olduğu durumlarda bu bildiride verilen yöntem [Orbak 2001]'de verilmiş olan yöntemin bu tip sistemlerde de kullanılmasını sağlayacaktır.



(a) Sistem parçası 1.



(b) Sistem parçası 2.

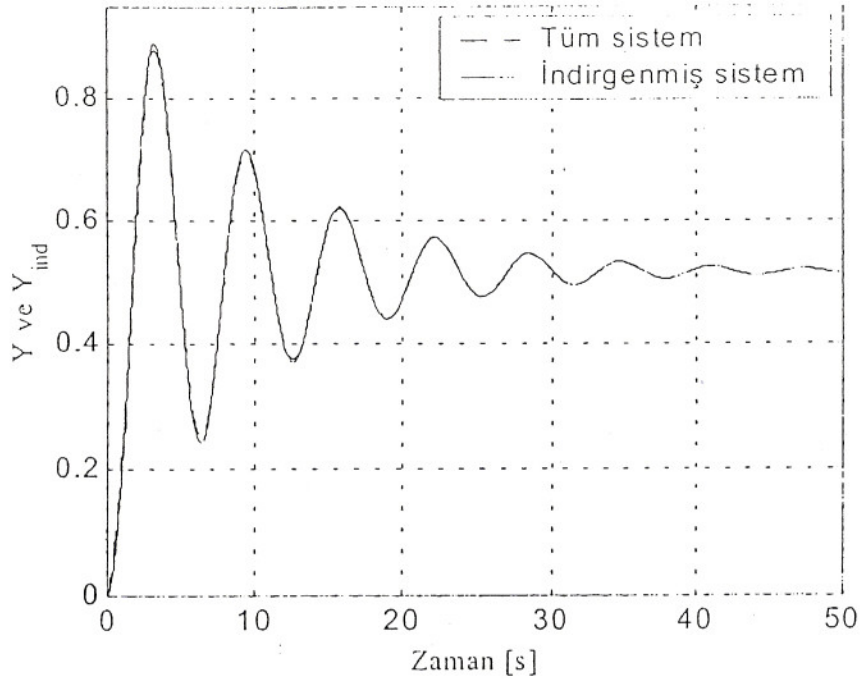
Şekil 3 LTI sistemin sistem parçacıkları.

Bu sistemin kalıntıları, kalıntıların mutlak değeri ve sistem parçacıklarının özdeğerleri Matlab ile Tablo 1'deki gibi hesaplanmıştır. Tablo 1'de kalıntı incelemesi yapıldığında ikinci sistem parçasının impuls ve basamak girişlerinde etkin olduğu görülür. O halde bu parçacık indirgenmiş sistem olarak alınacaktır. Birim basamak girişi için yapılan zaman ve frekans benzetimi sonuçları Şeki 4 ve Şekil 5'de verilmiştir. Bu şekillerden görülebileceği gibi, sonuçlar hem zaman uzayında ve hemde frekans uzayında istenilen düzeydedir. Burada cevaplar DC kazanç hatası sıfırlanacak şekilde düzeltilmiştir. DC kazanç hatası atılan moddan (k_2 'nin durağan hale etkisi) kaynaklanmaktadır ve düzeltilmesi kolaylıkla yapılabilir.

Tablo 1 Tüm sistemin kalıntıları, bunların mutlak değerleri, özdeğerleri ve sistem parçacıklarının özdeğerleri

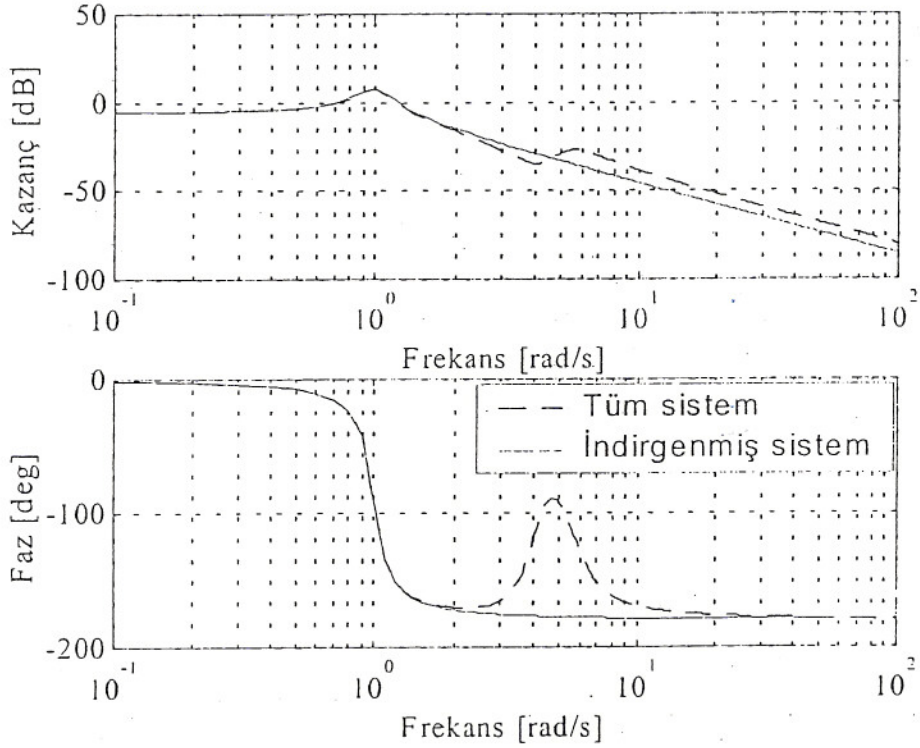
Tüm Sistem			Sistem Parçacıkları
Kalıntılar	Mutlak Değer	Özdeğerler	Özdeğerler
$-0.0000 \mp 0.0458i$	0.0458	$-1.1000 \pm 5.4580i$	$-1.1000 \pm 5.3852i$
$-0.0000 \mp 0.2513i$	0.2513	$-0.1000 \pm 0.9950i$	$-0.1000 \pm 0.9950i$

Basamak Cevabının Karşılaştırılması



Şekil 4 LTI sistemin zaman uzayı benzetimi.

Frekans Cevabının Karşılaştırılması



Şekil 5 LTI sistemin frekans uzayı benzetimi.

5. Sonuçlar

Bu bildiride LTI sistemlerin verilen bir özdeğerine etki etmeyen bileşenlerinin bulunmasını sağlayan çeşitli teoremler verilmiştir. Bu teoremlerin sonuçları ve bond çizge yönteminin kullanım kolaylığı ile model indirgenmesi için geliştirilmiş bir yöntemin adımları verilmiştir. Yöntemde

özdeğer/özvektör analizi yapıldıktan sonra bond çizgesi üzerinden ayrıştırma yapılmakta, daha sonra sistemin parçacıkları elde edilmekte ve kalıntılardan gelen bilgi de kullanılarak sistemin verilen bir giriş için en uygun indirgenmiş modeli bulunmaktadır. Sistem parametreleri yada döngü kazançları birbirine çok yakın veya aynı olan modellerde, literatürde verilmiş olan fiziksel model indirgeme yöntemlerinin bu bildiride verilen yöntem ile birlikte iyi sonuç vereceği belirtilmiştir. Bildiride son olarak bu yöntem bir örnek üzerine uygulanmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Decarlo R. ve Saeks R. *Interconnected Dynamical Systems*. Marcel Dekker Inc., New York, 1981.
- [2] Huang S.-Y. ve Youcef-Toumi K. Structural analysis for modeling and design of multi-energy domain dynamic systems. *Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, AIM97*, Haziran 1997.
- [3] Karnopp D. C., Margolis D. L. ve Rosenberg R. C. *System Dynamics. A Unified Approach. Second Edition*. John Wiley & Sons, Inc. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1990.
- [4] Orbak Â. Y. Fiziksel sistem modellerinin bond çizge yöntemi ile indirgenmesi. Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi, TOK2001 Bildiriler Kitabı, sayfa 69-74, Bursa, Ekim 2001.
- [5] Orbak Â. Y. Physical domain model reduction for design and control of engineering systems. Mech. E. tezi, Massachusetts Institute of Technology, Makina Mühendisliği Bölümü, Haziran 1998.
- [6] Robertson G. ve Cameron I. Analysis of dynamic process models for structural insight and model reduction-Part 1. Structural identification measures. *Computers Chemical Engineering*, cilt 21, no. 5, sayfa 445-473, 1997.
- [7] Rosenberg R. State-space formulation for bond graph models of multiport systems. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Mart 1971.
- [8] Ye Y. ve Youcef-Toumi K. Subsystem's influence on a system eigenvalue. *Proceedings of the IEEE Southeastcon 2000*, Nashville, TN, sayfa 261-267, 7-9 Nisan 2000.