

FİZİKSEL SİSTEM MODELLERİNİN BOND ÇİZGE YÖNTEMİ İLE İNDİRGENMESİ

Âli Yurdun ORBAK

Uludağ Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi
Endüstri Mühendisliği Bölümü, Bursa, Türkiye
e-posta: orbak@alum.mit.edu

Anahtar kelimeler: Fiziksel modelleme, Bond çizge yöntemi, Model indirgenmesi.

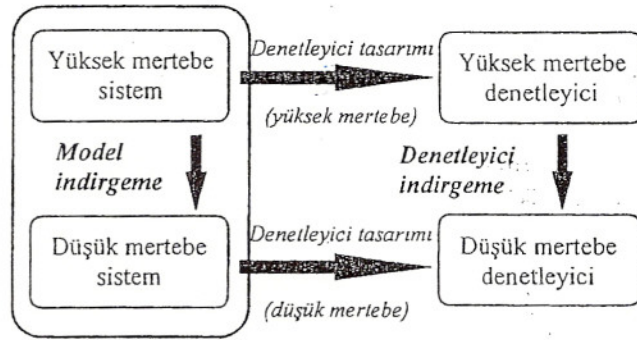
ÖZET

Bir dinamik sistemin karmaşık bir modeli elde edildiğinde, kontrol elemanı tasarımı, parametre optimizasyonu, ve sistem davranışı hakkında bilgi edinmek gibi amaçlar için sistemin basitleştirilmiş bir modelini bulmak önem taşır. Bu nedenle indirgenmiş modeller kontrol sistem analizinde uzun yıllardır incelenmektedir. Böyle olmasına rağmen, sunulan yöntemler matematiksel model ile sistemin fiziksel bileşenleri arasındaki ilişkiyi ortaya koymamaktadırlar. Bu makalede, doğrudan matematiksel model kullanılması yerine fiziksel bir modelleme aracı olan Bond çizge yöntemi kullanılarak model indirgenmesinin temel prensipleri verilmektedir. Bu prosedür sistemin parçacıklarının belirlenmesini sağlamakta ve indirgenmiş model bu parçacıklar arasından sistemin kalıntı (residü) bilgisiyle seçilmektedir.

1. GİRİŞ

Model indirgenmesi yöntemleri kontrol mühendisliği problemlerinin çözümünde iki önemli amaca hizmet ederler. İlk olarak kontrol tasarımı problemini analitik kontrol sentezi yöntemlerinin uygulanabileceği, kolay erişilebilir boyuta getirebilmek amacıyla kullanılırlar. İkinci olarak ise kontrol elemanı indirgenmesi, donanım açısından uygulanabilir karmaşıklıkta kontrol elemanı elde edilmesini sağlar. Buna rağmen literatürdeki çoğu yöntem kontrol elemanlarının indirgenmesi üzerinedir. Şekil 1'de düşük mertebeden denetleyici elde edilmesinin iki yolu gösterilmektedir. Birinci yolda yüksek mertebeden sistem modeli indirgenmekte ve daha sonra kontrol elemanı tasarımı bu indirgenmiş sistem modeli ile gerçekleştirilmektedir. İkinci yolda ise önce yüksek mertebeden sistem modeli için kontrol elemanı tasarlanmakta, daha sonra bu kontrol elemanı indirgenmektedir.

Yukarıda açıklandığı gibi model indirgenmesinin kullanılmasının bir nedeni model davranışı hakkında bilgi edinebilmektir. Bu şekilde düşük mertebeden model elde edildiğinde gerekli sistem dinamiğinin korunması amaçlanır. Matematiksel açıdan bu işlem uygun bir hata normunun enaza indirilmesiyle yapılır. Literatürdeki tekniklerin çoğu bu şekilde indirgenen modelin "iyiliği" için bir ölçüt kullanmaktadır. Örneğin



Şekil 1 Düşük mertebe tasarım yöntemleri.

[1]'de sunulan dengeleme yöntemi, sistemi özel bir forma sokmak için bir koordinat dönüşümü tanımlar. İndirgeme bu yeni form üzerinde yapılır. Literatürde hem zaman ve hem de frekans alanları için birçok yöntem vardır. Bu yöntemlerin bazıları şu şekildedir; bileşenlerin değer analizi [2], Padé yaklaşımları [3], sürekli kesir yöntemleri [4], momentleri birbirine uydurma [5], dengeleme ve kesme yöntemleri [6], en küçük kareler yöntemleri [7], vd. Bütün bu yöntemlerin birbirine göre üstünlükleri ve zaafları vardır, ancak bunlar konumuzun dışında olduğundan burada anlatılmayacaktır. Yanlızca belirtmek istenen bütün bu yöntemlerin matematiksel olarak bir "eğri uydurma" olarak algılanabileceğidir.

Bu makalede sistem modellemesinde sıkça kullanılan Bond çizge yöntemi ile model indirgenmesinin temel ilkeleri belirtilecektir. Bu yöntem, doğrudan sistem modeli üzerinde uygulanabildiğinden ve elde edilen indirgenmiş sistemin tüm sistemle fiziksel bir ilgisi olduğundan, hem kontrol mühendisinin sistemi daha iyi tanımasını sağlamakta hem de sistemin gelecekteki geliştirilmelerinde zaman ve maliyet kazanımına neden olmaktadır [8].

II. BOND ÇİZGE YÖNTEMİ İLE MODEL İNDİRGENMESİ

Fiziksel bir sistemin modelinin indirgenmesindeki ilk aşama sistemin yapısal bilgisinin bir ayrıştırma prosedürü ile elde edilmesidir. Yapısal bilginin elde edilebilmesi için prosedürün doğrudan sistem modeli üzerinde uygulanması gerekir. Bu işlem için kullanılacak modelleme araçlarından birisi Bond çizge yöntemidir. Bond çizge modelleri, sistemlerin dinamik davranışlarını enerjinin korunumu prensibine dayanan ayrık ve ideal elemanların birleştirilmesiyle belirtirler [11]. Bir ağı andıran bu modeller dinamik sistemlerin yapısı hakkında çok kullanışlı bilgi sunarlar. Bilindiği gibi bir sistemin davranışı sistemin yapıya bağlıdır. Örneğin eğer bir sistem sadece enerji depolayan elemanlardan, I (atalet) ve C (sığa) elemanlarından, oluşmuşsa sistemin bütün özdeğerleri sanal eksen üzerinde olacaktır. Bir başka örnek olarak, eğer sistem sadece R (direnç) ve I veya R ve C elemanlarından oluşuyorsa, sistemin özdeğerleri her zaman gerçek olacaktır. Bu durumda sistemin hızlı ve yavaş dinamiğini belirten elemanları "yerel döngü kazançları" [9] kullanılarak belirlenebilir. Eğer sistemde yukarıdaki her iki etki de aynı anda mevcutsa, o zaman daha gelişmiş bir ayrıştırma prosedürü kullanılarak çeşitli sistem davranışları bulunabilir. Bu prosedür şimdi kısaca açıklanacaktır¹.

Bu prosedür yine "yerel döngü kazançlarına" dayanmaktadır². Bir sistemin Bond çizgesi elde edildikten sonra ayrıştırma şu adımlarla uygulanabilir [8,10]:

1. C elemanlarını sıfır değerli akım kaynağı ile değiştirin ve geriye kalan $R-I$ çiftlerini $\mathcal{H}$ olarak adlandıracağınız, yüksek sönümlü bir kümeye koyun.
2. Yukarıdaki I elemanlarıyla doğrudan ilişkili olan C elemanlarını belirleyin. Eğer $\sqrt{G_{IC}} \gg G_{IR}$ ise, C elemanlarını sıfır değerli akım kaynağı ile değiştirin

ve bunları ve işlemdeki birleşim noktalarını $\mathcal{H}$ kümesine koyun. Eğer eşitsizlik yön değiştirirse belirlediğiniz C elemanlarını yok sayın. Burada, G_{IC} $I-C$ döngü kazancını, G_{IR} ise $I-R$ çiftlerinin döngü kazançlarının toplamını belirtmektedir. Bu kazançlar sırasıyla $\frac{1}{IC}$ ve $\frac{R}{I}$ ile hesaplanabilir.

3. Yukarıdaki kaynaklar nedeniyle bağımlı duruma gelen I elemanlarını belirleyin ve bunları $\mathcal{H}$ kümesine koyun.
4. Bütün I elemanlarını sıfır değerli çaba kaynağı ile değiştirin ve geriye kalan $R-C$ çiftlerini belirleyerek $\mathcal{H}$ kümesine koyun.
5. Yukarıdaki C elemanlarına doğrudan ilişkili olan I elemanlarını belirleyin. Eğer $\sqrt{G_{IC}} \gg G_{RC}$ ise, I elemanlarını sıfır değerli çaba kaynağı ile değiştirin ve bunları ve işlemdeki birleşim noktalarını $\mathcal{H}$ kümesine koyun. Eğer eşitsizlik yön değiştirirse belirlediğiniz I elemanlarını yok sayın. Burada, G_{RC} $R-C$ çiftlerinin döngü kazançlarının toplamını belirtmektedir. Bu kazançlar $\frac{1}{RC}$ ile hesaplanabilir.
6. Yukarıdaki kaynaklar nedeniyle bağımlı duruma gelen C elemanlarını belirleyin ve bunları $\mathcal{H}$ kümesine koyun.
7. Fazla sönümlenmiş yerel döngülerle ilişkili olan R elemanlarını bulun, bunları ve bunlar ile ilişkili $I-C$ çiftlerini ve birleşim noktalarını $\mathcal{H}$ kümesine koyun.
Yerel sönüm oranları $\frac{G_{RC}}{2\sqrt{G_{IC}}}$ ve $\frac{G_{RI}}{2\sqrt{G_{IC}}}$ kullanılarak hesaplanabilir. Bu hesaplama ikinci mertebeden bir sistemin sönüm oranının bulunmasıyla aynıdır.
8. Yedinci adımda yer almayan ancak yukarıdaki I elemanlarına doğrudan bağlı olan C elemanlarını belirleyin. Eğer $\sqrt{G_{IC}} \gg G_{IR}$ ise, C elemanlarını sıfır değerli akım kaynağı ile değiştirin ve bunları ve işlemdeki birleşim noktalarını $\mathcal{H}$ kümesine koyun. Eğer eşitsizlik yön değiştirirse belirlediğiniz C elemanlarını yok sayın.
9. Yedinci adımda yer almayan ancak yukarıdaki C elemanlarına doğrudan bağlı olan I elemanlarını belirleyin. Eğer $\sqrt{G_{IC}} \gg G_{RC}$ ise, I elemanlarını sıfır değerli çaba kaynağı ile değiştirin ve bunları ve işlemdeki birleşim noktalarını $\mathcal{H}$ kümesine koyun.

¹ Burada [8,9]'daki ayrıştırma prosedürü özetlenerek verilmiştir.

² Bu makalede yerel döngü kazançları G ile verilmektedir.

Eğer eşitsizlik yön değiştirirse belirlediğiniz I elemanlarını yok sayın.

Bu prosedürün bir benzeri az sönümlü modların bulunması için kısaca şu şekilde yazılabilir:

1. Az sönümlü yerel döngülerle ilgili olan I - C çiftlerini belirleyin ve $\mathcal{L}$ olarak adlandıracağımız az sönümlü kümeye koyun.
2. Birinci adımda kullanılmayan ancak yukarıdaki I ve C elemanlarına doğrudan bağlı olan R elemanlarını belirleyin. Eğer $\sqrt{G_{IC}} \ll G_{IR}$ veya $\sqrt{G_{IC}} \ll G_{RC}$ ise "direnc (resistif)" R elemanlarını sıfır değerli akım kaynakları ile, "iletken (kondüktif)" R elemanlarını sıfır değerli çaba kaynakları ile değiştirin ve bunları $\mathcal{L}$ kümesine koyun.
3. İkinci adımdaki kaynaklar nedeniyle bağımlı duruma gelen enerji biriktirme elemanlarını belirleyin ve bunları $\mathcal{L}$ kümesine koyun.

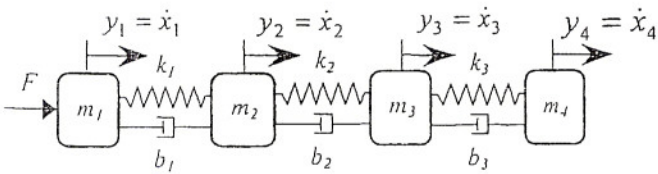
Bu ayrıştırma yapıldıktan sonra model indirgenmesi ilgili modların belirlenmesi ve modların sistem parçacıkları ile karşılaştırılması ile yapılabilir.

Verilen bu model ayrıştırma ve indirgeme prosedürü önümüzdeki bölümde tek girişli-tek çıkışlı bir sisteme uygulanacaktır.

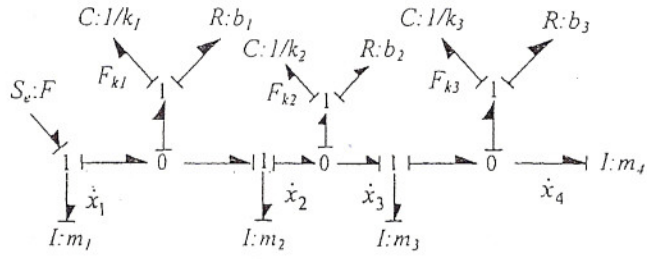
III. TEK GİRİŞ-TEK ÇIKIŞLI BİR SİSTEM

Şekil 2'de mekanik bir sistem görülmektedir. Bu sistemin Bond çizgesi Şekil 3'deki gibidir. Sistemde integral etkide yedi tane enerji biriktirme elemanı olduğundan sistemin mertebesi yedidir. Benzetim amacıyla şu parametreler kullanılmıştır:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1 \text{ kg}, \quad k_1 = 4 \frac{N}{m}, \quad k_2 = 2 \frac{N}{m}, \quad k_3 = 8 \frac{N}{m}, \quad b_1 = 1 \frac{Ns}{m}, \quad b_2 = 2 \frac{Ns}{m}, \quad \text{ve } b_3 = 4 \frac{Ns}{m}.$$



Şekil 2 Yedinci mertebeden tek giriş-tek çıkışlı mekanik sistem.



Şekil 3 Yedinci mertebeden mekanik sistemin Bond çizgesi.

Bu modelde, dallardaki çaba durum değişkenleri, $x = [\dot{x}_4 \ F_{k_3} \ \dot{x}_3 \ F_{k_2} \ \dot{x}_2 \ F_{k_1} \ \dot{x}_1]^T$ kullanılarak sistemin durum-uzayı denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir. Burada F_{k_i} , i yayındaki kuvveti, ve F sistemin girişini temsil etmektedir.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

ve burada

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{b_3}{m_4} & \frac{1}{m_4} & \frac{b_3}{m_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_3 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_3}{m_3} & -\frac{1}{m_3} & -\frac{b_2+b_3}{m_3} & \frac{1}{m_3} & \frac{b_2}{m_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{1}{m_2} & -\frac{b_1+b_2}{m_2} & \frac{1}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_1}{m_1} & -\frac{1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1} \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

Eğer uygulayıcı, örnek olarak, F_{k_1} yay kuvveti ile ilgileniyorsa, çıkış denklemi:

$$y = Cx = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]x \quad (4)$$

şeklinde olacaktır.

Önceki bölümde anlatılan ayrıştırma yöntemi kullanılarak elde edilen sistem parçacıkları Şekil 4'de görülmektedir. Bu parçacıkların bulunması için yapılan hesaplamalardan önemlileri şu şekildedir:

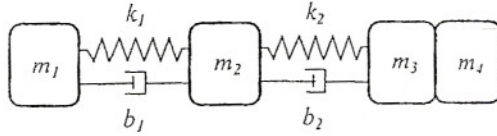
$$G_{1-2} = \frac{k_1}{m_1} = \frac{k_1}{m_2} = 4 \frac{rad}{s^2}, \quad G_{2-3} = \frac{k_2}{m_2} = \frac{k_2}{m_3} = 2 \frac{rad}{s^2},$$

$$G_{3-4} = \frac{k_3}{m_3} = \frac{k_3}{m_4} = 8 \frac{rad}{s^2},$$

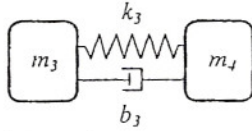
$$\zeta_{1-2} = \frac{b_1}{2\sqrt{k_1 m_1}} = \frac{b_1}{2\sqrt{k_1 m_2}} = 0.25,$$

$$\zeta_{2-3} = \frac{b_2}{2\sqrt{k_2 m_2}} = \frac{b_2}{2\sqrt{k_2 m_3}} = 0.707,$$

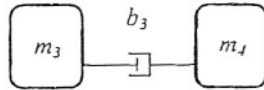
$$\zeta_{3-4} = \frac{b_3}{2\sqrt{k_3 m_3}} = \frac{b_3}{2\sqrt{k_3 m_4}} = 0.707.$$



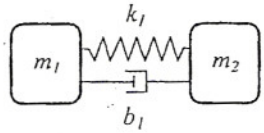
(a) 1. sistem parçacığı.



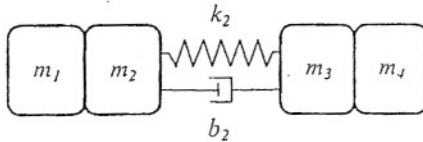
(b) 2. sistem parçacığı.



(c) 3. sistem parçacığı.



(d) 4. sistem parçacığı.



(e) 5. sistem parçacığı.

Şekil 4 Yedinci mertebeden sistemin sistem parçacıkları.

Model indirgenmesinde ayırtırmadan sonra gelen ikinci adım sistemin kalıntılarının, bunların mutlak değerlerinin ve özdeğerlerinin hesaplanmasıdır. Bu hesabın sonucunda çıkan değerler Tablo 1'de verilmiştir. Burada en büyük mutlak değere sahip olan kalıntı sistem davranışına en çok etki eden modu belirtmektedir. Bu nedenle, elimizdeki örnekte tabloda kalın yazıyüzü olarak belirtilen kalıntılara karşılık gelen özdeğerlerin indirgenmiş modelde korunması

gerekmektedir. İstenilen hassasiyete bağlı olarak korunacak özdeğerler azaltılabilir ya da artırılabilir.

Tablo 1 Yedinci mertebeden sistemin kalıntıları, bunların mutlak değerleri ve karşılık gelen özdeğerleri.

Kalıntı	Mutlak Değeri	Özdeğer
-0.0045	0.0045	-7.1429
$-0.4143 \pm 0.5854i$	0.7172	$-1.5381 \pm 2.3328i$
$0.4504 \pm 0.2194i$	0.5010	$-0.7959 \pm 1.2097i$
0	0	0
-0.0679	0.0679	-2.1888

Şimdi yapılması gereken sistem parçacıklarından hangilerinin yukarıda belirlenen bu özdeğerlere karşılık geldiğinin bulunmasıdır. Tablo 2, sistem parçacıklarının özdeğerlerini belirtmektedir.

Tablo 2 Sistem parçacıklarının özdeğerleri.

Özdeğer	Sistem Parçacık Numarası
$-1.5775 \pm 2.0860i$	1
$-0.9225 \pm 1.2199i$	1
0	1
-4	2
-4	2
-8	3
$-1.0000 \pm 2.6458i$	4
$-1.0000 \pm 1.0000i$	5

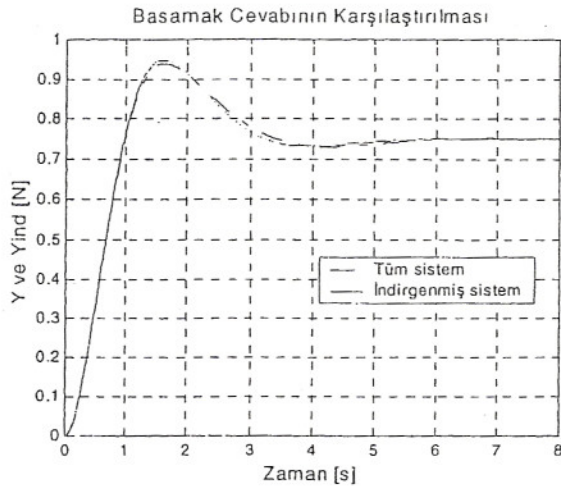
Tablo 1 ve Tablo 2'ye göre indirgenmiş model olarak bir numaralı sistem parçacığı (Şekil 4-(a)) kullanılmalıdır. Görüldüğü gibi bu sistem parçacığı kullanıldığında indirgenmiş sistemin özdeğerleri gerçek sistemin özdeğerlerine oldukça yakın olacaktır, bu da zaten istenilen sonuçtur. Bir numaralı sistem parçacığının durum uzayı denklem matrisleri, $\mathbf{x} = [\dot{x}_3 \ F_{k_2} \ \dot{x}_2 \ F_{k_1} \ \dot{x}_1]^T$ alınırsa, aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{b_2}{m_3 + m_4} & \frac{1}{m_3 + m_4} & \frac{b_2}{m_3 + m_4} & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_2 & 0 & 0 \\ \frac{b_2}{m_2} & -\frac{1}{m_2} & -\frac{b_1 + b_2}{m_2} & \frac{1}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} \\ 0 & 0 & -k_1 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & \frac{b_1}{m_1} & -\frac{1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

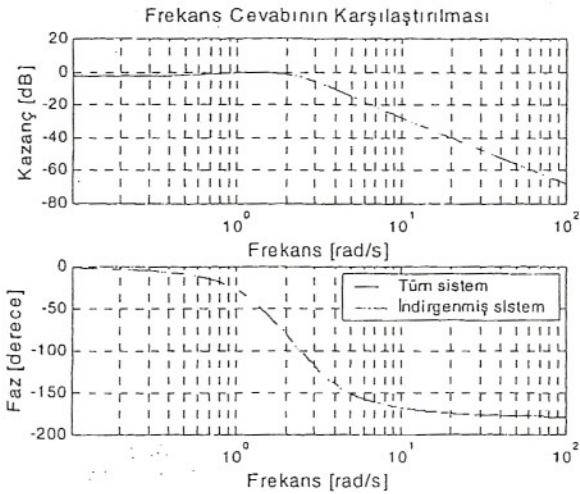
$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad D = 0 \quad (7)$$

Tüm sistemin ve indirgenmiş sistemin birim basamak cevabı ve frekans cevabı yukarıda verilen benzetim değerleri için Şekil 5 ve Şekil 6'da görülebilir. Şekil 7 ve Şekil 8'de ise zaman ve frekans cevabının hataları gösterilmiştir.

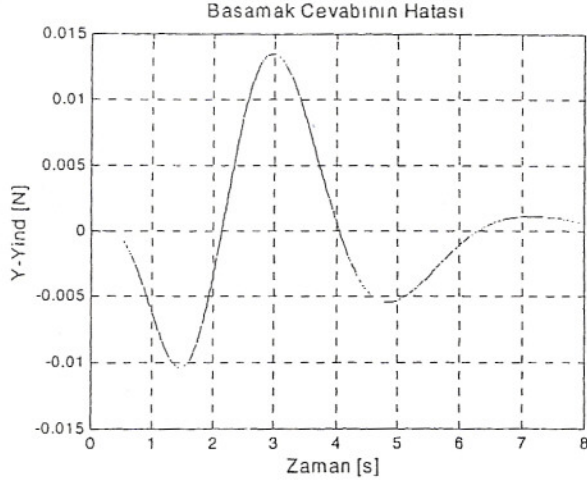


Şekil 5 Tüm sistemin ve indirgenmiş sistemin basamak cevabı.

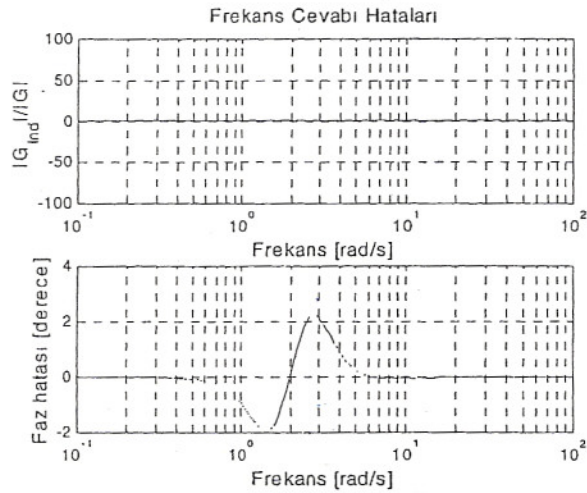


Şekil 6 Tüm sistemin ve indirgenmiş sistemin frekans cevabı.

Bu şekillerden görülebileceği gibi, sonuçlar hem zaman uzayında ve hemde frekans uzayında istenilen düzeydedir. Frekans cevabında kazanç hatası sıfır, faz hatası ise belirli bir aralıkta kalmak kaydıyla 2 derece civarındadır. Bu hata indirgeme yapılırken atılan moddan kaynaklanmaktadır.



Şekil 7 Birim basamak cevabının hatası.



Şekil 8 Frekans cevabının hatası.

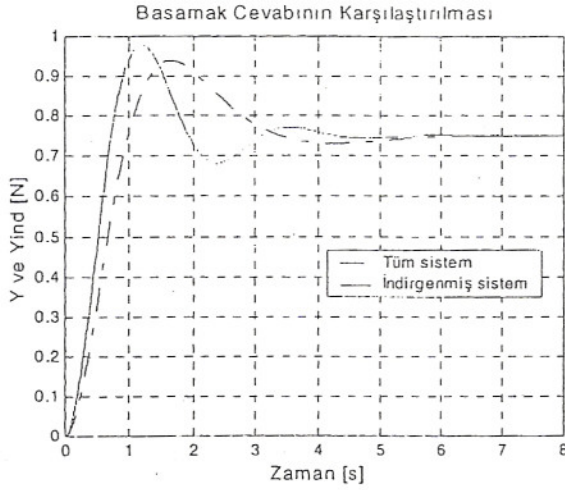
Eğer daha fazla mod atılacak olursa hata da büyüyecektir. Aynı sistemin üçüncü mertebeden indirgenmiş modelinin birim basamak ve frekans cevapları Şekil 9 ve Şekil 10'da verilmiştir³. Bu indirgenmiş model yine Tablo 1 ve Tablo 2'den bakılarak dört numaralı sistem parçası (Şekil 4-(d)) olarak tespit edilir. Bu sistem parçasının durum uzayı denklem matrisleri, $\dot{x} = \begin{bmatrix} F_{k_1} & \dot{x}_2 & \dot{x}_1 \end{bmatrix}^T$ alırsa, aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & k_1 \\ \frac{1}{m_2} & -\frac{b_1}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} \\ -\frac{1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

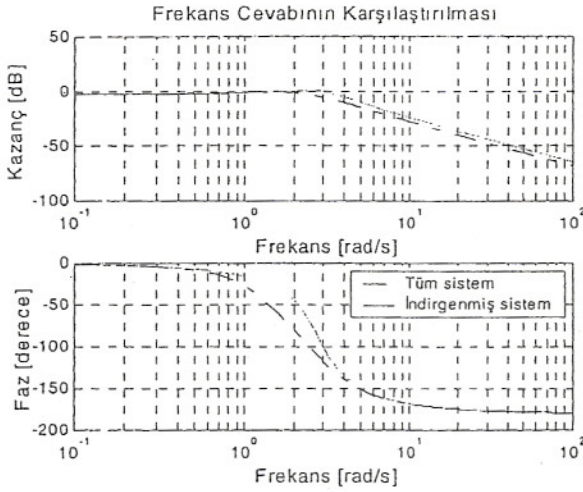
³ Burada cevaplar DC kazanç hatası sıfırlanacak şekilde düzeltilmiştir. DC kazanç hatası atılan modlardan kaynaklanmaktadır ve düzeltilmesi kolaylıkla yapılabilir.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0 \quad (9)$$

Şekillerden görüleceği gibi hata daha fazla olmakla birlikte cevaplar halen kabul edilebilir düzeydedir.



Şekil 9 Sistemin üçüncü mertebeden indirgenmiş modelinin birim basamak cevabı.



Şekil 10 Sistemin üçüncü mertebeden indirgenmiş modelinin frekans cevabı.

IV. SONUÇLAR

Bu makalede, Bond çizge yöntemi kullanılarak model indirgenmesi açıklanmıştır. Bu yöntem doğrudan fiziksel model bilgilerini kullanmaktadır. Önceden belirtildiği gibi şu anki kullanılan model indirgeme teknikleri sayısal yaklaşımlar kullanmakta ve elde edilen indirgenmiş modellerin özgün sistem ile fiziksel bağları kalmamaktadır. Bond çizgesi üzerinde bir ayrıştırma prosedürü kullanılarak sistemin parçacıklarının elde edilmesi ve kalıntılardan gelen bilgi kullanılarak sistemin önemli modları elde edilebilmekte ve böylece en uygun indirgenmiş model bulunmaktadır.

Elde edilen indirgenmiş modeller gerçek sistemin davranışını uygun bir şekilde vermektedirler.

REFERANSLAR

- [1] MOORE, BRUCE C. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1):17-32, 1981.
- [2] SKELTON, ROBERT E. ve AJMAL YOUSUFF. Component cost analysis of large scale systems. *International Journal of Control*, 37(2):285-304, 1983.
- [3] XIANG, HU. FF-Padé method of model reduction in frequency domain. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(3):243-246, Mart 1987.
- [4] SHIEH, L. S. ve F. F. GAUDINO. Matrix continued fraction expansion and inversion by the generalized matrix routh algorithm. *International Journal of Control*, 20(5):727-737, 1974.
- [5] DAVIDSON, A. M. ve I. R. WALTERS. Linear system reduction using approximate moment matching. *IEE Proceedings, Part D*, 135(2):73-78, 1988.
- [6] SAFONOV, M. G. ve R. Y. CHIANG. A schur method for balanced-truncation model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(7):729-733, Temmuz 1989.
- [7] LALONDE, R. J., T. T. HARTLEY, ve J. A. DE ABREU-GARCIA. Least squares model reduction. *Journal of the Franklin Institute*, 329(2):215-240, 1992.
- [8] ORBAK, ÂLİ YURDUN. Physical domain model reduction for design and control of engineering systems. Mech. E. tezi, Massachusetts Institute of Technology, Makina Mühendisliği Bölümü, Haziran 1998.
- [9] HUANG, SHIH-YING. *Structural analysis from system configurations for modeling and design of multi-energy domain dynamic systems*. Doktora tezi, Massachusetts Institute of Technology, Makina Mühendisliği Bölümü, Haziran 1997.
- [10] HUANG, S.-Y. ve K. YUCEF-TOUMI. Structural analysis for modeling and design of multi-energy domain dynamic systems. *Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, AIM97*, Haziran 1997.
- [11] KARNOPP, DEAN C., MARGOLIS, DONALD L., ve RONALD C. ROSENBERG. *System Dynamics. A Unified Approach. Second Edition*. John Wiley & Sons, Inc. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1990.