

## FİZİKSEL PARAMETRE DEĞİŞİMLERİNİN İNCELENMESİ VE ETKİ MATRİSLERİ

Âli Yurdun Orbak

*Uludağ Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi,  
Endüstri Mühendisliği Bölümü, Görükle, 16059 BURSA  
orbak@uludag.edu.tr, orbak@alum.mit.edu*

**ÖZET:** İncelenen sistemin özdeğerlerinin davranışı sistemin toplam performansına etki eden en önemli faktörlerdendir. Ancak sistem parametrelerinde meydana gelen değişimler özdeğerlere de etki etmektedir. Bu nedenle sistemlerin tekrar tasarımında ve/veya incelenmesinde parametrelerin yarattığı değişimlerin incelenmesi büyük önem taşımaktadır. Bu bildiriye parametrelerin değişimlerinin özdeğerlere etkisi araştırılmakta ve bu amaçla kullanılabilir duyarlılık üzerine kurulu etki matrislerinin yapısı verilmektedir. İşlemler ve yöntem yüksek verim alınması amacıyla bağ çizgesi yöntemi ile yapılmıştır. Etki matrisleri ve parametre değişimlerinin incelenmesi fiziksel bir sistem üzerinde gösterilmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Fiziksel modelleme, fiziksel parametreler, duyarlılık analizi, etki matrisleri, bağ çizgesi yöntemi

### 1. GİRİŞ

Fiziksel sistem bileşen veya parametreleri ile sistemin dinamik davranışı arasındaki ilişkiyi belirleme önemli bir konudur. Bir ilişkilendirme doğru bir şekilde yapılabildiğinde, hem sistemin dinamik davranışı parametrelerin uygun seçimiyle istenilen şekilde değiştirilebilmekte ve hem de sistem kullanıcı tarafından daha verimli analiz edilebilmektedir.

Yukarıda açıklanan ilişkinin doğru bir şekilde ve kolaylıkla belirlenememesinin belkide en önemli nedeni problemin matematiksel olarak zor olmasıdır. Bilindiği gibi, altı ve daha yüksek mertebeden sistemlerin özdeğerlerini parametrelerinin analitik bir fonksiyonu olarak yazabilmek teorik olarak mümkün değildir. Yinede yüksek mertebeden sistemlerin incelenmesine olanak sağlayan duyarlılık analizi, köklerin geometrik yeri teknikleri gibi yöntemler literatürde mevcuttur. Ancak bu yöntemlerin de kendilerine özgü bazı problemleri vardır. Örneğin duyarlılık analizi sadece küçük değişimlerin incelenebilmesini sağlamaktadır (Decarlo, et. al., 1981). Köklerin geometrik yeri yöntemleri ise sadece sistem parçacıklarının önemini belirlenmesine yardımcı olurlar ve sistemin özdeğerine olan

parametre veya bileşen etkisini belirleyemezler (Robertson, et. al., 1997).

Son zamanlarda yapılan araştırmalarda sistemin bağ çizgesi yöntemi (Karnopp, et. al., 1990) kullanılarak model-özdeğer ilişkisi çıkarılmış ve bu yöntem ile model indirgenmesi ve tasarım problemleri fiziksel alanda çözülmeye çalışılmıştır (Huang ve Youcef-Toumi, 1997; Orbak, 1998; Orbak, 2001).

Bu bildiriye, sistemin parametrelerinin verilen bir özdeğere yaptığı etki incelenecek ve bu amaçla literatürde bulunan (Orbak, et. al., 2004) etki matrislerinin bu değişimlerle ilişkisi açıklanacaktır.

### 2. PARAMETRELERİN ÖZDEĞERE OLAN ETKİLERİ

Bu bölümde LTI bir sistemin verilen bir özdeğerine sistem parametrelerinin etkisi incelenecektir. Bu bildiriye etkiler incelenirken daha önce açıklanmış olan (Ye ve Youcef-Toumi, 2000; Orbak, 2002; Orbak, 2004) yöntemlerden faydalanılacaktır. Bu nedenle incelemeye başlanılmadan önce bu konuda kısa bir giriş yapılması gerekmektedir.

## 2.1 LTI Sistemin Durum Uzayı Gösterimi

LTI bir sistemin durum uzayı gösteriminin fiziksel bir yolu (Rosenberg, 1971) şu şekildedir.

Fiziksel sistemlerdeki elemanların başlıcaları atalet ( $I$ ), sığa ( $C$ ) ve dağıtıcı ( $R$ ) olarak alınacak olursa, bir LTI sistem, parametrelerini ve yapısını belirten çeşitli matrislerle belirtilebilir (Orbak, et. al., 2004). Bu matrislerin başlıcaları bileşenlerin parametrelerini belirten ve enerji biriktirme elemanlarının parametrelerini içeren  $\mathbf{S}$  ile enerji dağıtıcı elemanların parametresini içeren  $\mathbf{L}$  matrisidir.  $\mathbf{S}$  ve  $\mathbf{L}$  matrisleri köşgensel matrislerdir ve siste elemanları cinsinden  $\mathbf{S} = \text{diag}[s_1, s_2, \dots, s_n]$  ve  $\mathbf{L} = \text{diag}[l_1, l_2, \dots, l_m]$  olarak verilirler (Orbak, 2002).

Bu iki matristen ayrı olmak üzere sistemin parametrelerinin birbirine bağlı olma durumunu belirten ve sistemin yapısını açıklayan aşağıdaki matrisler kullanılabilir (Orbak, 2002; Orbak, et. al., 2004):

- $\mathbf{J}_{SS}$  enerji biriktirme elemanlarının çıkışları ve girişleri arasındaki bağlantıyı verir.
- $\mathbf{J}_{SL}$  enerji biriktirme elemanlarının girişleri ile enerji dağıtıcı elemanların çıkışları arasındaki bağlantıyı verir.
- $\mathbf{J}_{LS}$  enerji biriktirme elemanlarının çıkışları ile enerji dağıtıcı elemanların girişleri arasındaki bağlantıyı verir (bu tanıma göre  $\mathbf{J}_{LS} = -\mathbf{J}_{SL}^T$  yazılabileceği açıktır).
- $\mathbf{J}_{LL}$  enerji dağıtıcı elemanların girişleri ve çıkışları arasındaki bağlantıyı verir.
- $\mathbf{J}_{SU}$  sistemin girişleri ile kaynakların girişleri arasındaki bağlantıyı verir.
- Ve son olarak  $\mathbf{J}_{LU}$  sistemin girişleri ile enerji dağıtıcı elemanların girişleri arasındaki bağlantıyı verir.

Bu matrisler yardımıyla sistemin durum uzayı denklemleri  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{A}$  ve  $\mathbf{B}$  matrisleri aşağıdaki şekilde olmak üzere hesaplanır (Rosenberg, 1971):

$$\mathbf{A} = \left[ \mathbf{J}_{SS} + \mathbf{J}_{SL}\mathbf{L}(\mathbf{I} - \mathbf{J}_{LL}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{J}_{LS} \right] \mathbf{S} \quad (1)$$

$$\equiv \mathbf{J}\mathbf{S}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}_{SU} + \mathbf{J}_{SL}\mathbf{L}(\mathbf{I} - \mathbf{J}_{LL}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{J}_{LU} \quad (2)$$

Bu fiziksel temelli durum uzayı gösteriminde özellikle (1) ile ifade edilen  $\mathbf{A}$  matrisinin yapısının çeşitli hesaplamalarda kolaylıklar sağlayacağı açıktır. Özellikle  $\mathbf{A}$  matrisinin, sistem parametrelerini içeren  $\mathbf{S}$  matrisinin sistem bileşenlerinin birbirleri ile bağlanmalarını ifade eden  $\mathbf{J}$  matrisi ile çarpılmasıyla oluşması önem taşımaktadır. Bu özellik kullanılarak sistemin parametrelere olan duyarlılığının incelenmesi kolaylaşmaktadır (Orbak, et. al., 2004).

Özdeğerlerin duyarlılığının hesaplanabilmesi için literatürde birçok yöntem bulunmakla birlikte, bu yöntemlerin hemen hepsinde duyarlılık sistem matrisi  $\mathbf{A}$ 'nın elemanlarına olan duyarlılığı vermektedir. Bilindiği gibi sistem matrisinin elemanları genellikle sistem parametrelerinin cebirsel birleşimlerinden oluşmaktadır. Bu ise özdeğerin tek bir parametre ile değişiminin incelenmesini oldukça zorlaştırmaktadır. (Orbak, et. al., 2004), bu konuda yaptığı çalışmada aşağıda verilen iki matrisin kullanılmasıyla bu sorunun ortadan kaldırılabilirliğini göstermiştir.

Belirtilen etki matrisleri kısaca şu şekilde verilmektedir:

## 2.2 Etki Matrisleri

Bu bölümün başında açıklanan durum uzayı gösteriminin yardımıyla sistemin özdeğerlerine parametrelerin etkileri aşağıdaki iki denklem yardımıyla hesaplanabilir:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial s_j} = \mathbf{v}_i^T \mathbf{J} t_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T \mathbf{u}_i \quad (3)$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial s_j} = \mathbf{v}_i^T \left( \mathbf{J}_{SL} z_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T \mathbf{J}_{LS} \mathbf{S} \right) \mathbf{u}_i \quad (4)$$

Bu denklemlerdeki daha önce verilmemiş değişkenler ve denklemlerin kabuller şu şekildedir:

- $\mathbf{u}_i$  ve  $\mathbf{v}_i$  sırasıyla sağ ve sol özdeğer vektörleridir.
- $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T$   $\mathbf{S}$  ve  $\mathbf{L}$  matrisleri köşgensel olduklarından parametrelere göre türevler birler ve sıfırlardan oluşacaktır.
- $t_j$  ve  $z_j$  Tablo 1 ve Tablo 2 ile verilen sabit çarpanlardır.
- (4) denklemini yazılırken yapısal sitemlerde çok karşılaşıldığından  $\mathbf{J}_{LL} \equiv \mathbf{0}$  olarak alınmıştır. Yani enerji dağıtıcı elemanlar birbirlerine nedensel olarak bağlı değildirler.

**Tablo 1 Enerji biriktirici elemanlar için sabit çarpanlar**

Sistem	$I$ elemanı	$t_j = \frac{\partial I}{\partial s}$	$C$ elemanı	$t_j = \frac{\partial C}{\partial s}$
Mekanik öteleme	$\frac{1}{m}$	$-\frac{1}{m^2}$	$k$	1
Mekanik dönme	$\frac{1}{J}$	$-\frac{1}{J^2}$	$k$	1
Hidrolik	$\frac{1}{I}$	$-\frac{1}{I^2}$	$\frac{1}{C}$	$-\frac{1}{C^2}$
Elektrik	$\frac{1}{L}$	$-\frac{1}{L^2}$	$\frac{1}{C}$	$-\frac{1}{C^2}$

$$\mathbf{L} = \text{diag}[b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6] \quad (8)$$

Tablo2 Enerji dağıtıcı elemanlar için sabit çarpanlar

Sistem	R elemanı	$z_j = \frac{\partial R}{\partial l}$
Mekanik öteleme	$b$	1
Mekanik dönme	$c$	1
Hidrolik	$R$	1
Elektrik	$R$	1

Son olarak (3) ve (4) denklemleri yardımıyla sistem parametrelerinin özdeğerlere göreceli olarak etkisi hakkında fikir veren ekti matrisleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\mathbf{E}_{IC} = \begin{bmatrix} \left| \frac{\partial \lambda_1}{\partial s_1} \right| & \left| \frac{\partial \lambda_1}{\partial s_2} \right| & \dots & \left| \frac{\partial \lambda_1}{\partial s_n} \right| \\ \left| \frac{\partial \lambda_2}{\partial s_1} \right| & \left| \frac{\partial \lambda_2}{\partial s_2} \right| & \dots & \left| \frac{\partial \lambda_2}{\partial s_n} \right| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left| \frac{\partial \lambda_n}{\partial s_1} \right| & \left| \frac{\partial \lambda_n}{\partial s_2} \right| & \dots & \left| \frac{\partial \lambda_n}{\partial s_n} \right| \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{E}_R = \begin{bmatrix} \left| \frac{\partial \lambda_1}{\partial l_1} \right| & \left| \frac{\partial \lambda_1}{\partial l_2} \right| & \dots & \left| \frac{\partial \lambda_1}{\partial l_m} \right| \\ \left| \frac{\partial \lambda_2}{\partial l_1} \right| & \left| \frac{\partial \lambda_2}{\partial l_2} \right| & \dots & \left| \frac{\partial \lambda_2}{\partial l_m} \right| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left| \frac{\partial \lambda_n}{\partial l_1} \right| & \left| \frac{\partial \lambda_n}{\partial l_2} \right| & \dots & \left| \frac{\partial \lambda_n}{\partial l_m} \right| \end{bmatrix} \quad (6)$$

Sonraki bölümde fiziksel parametrelerin sistem özdeğerlerine olan etkisi etki matrisleride gözönüne alınarak incelenecektir.

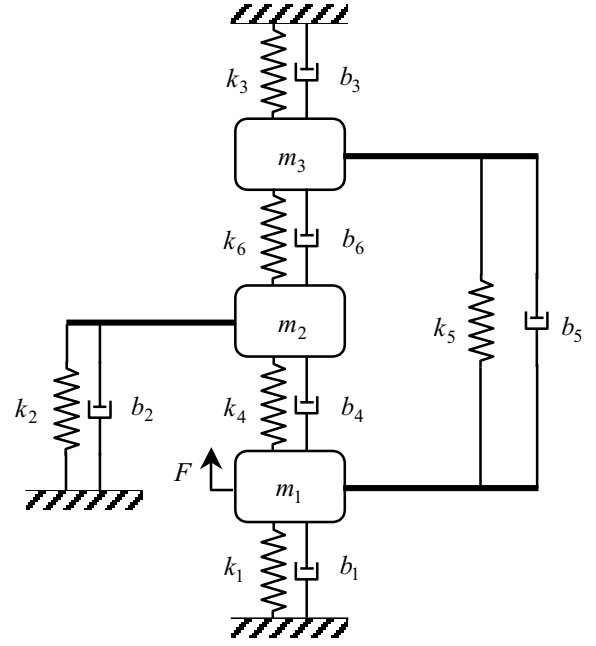
### 3. ÖRNEK UYGULAMA

Bu bölümde özdeğerlere fiziksel parametrelere etkisi incelenecektir. Bu amaçla nominal değerleri verilen bir sistemin etki matrisleri hesaplanacak, ve bu değerlerden elde edilecek sonuçlara göre önemli olarak belirlenen parametrelerin değişimleri incelenecektir.

Örnek kütle-yay-damper sistemi Şekil 1'de görülmektedir (Orbak, et. al, 2004). Sistemin nominal değerleri  $m_1 = m_2 = m_3 = 3$  kg,  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = k_3 = k_4 = k_6 = 5$ ,  $k_5 = 2.5$  N/m, ve  $b_1 = 2.5$ ,  $b_2 = b_3 = b_5 = 1.5$ ,  $b_4 = 2$ ,  $b_6 = 1$  Ns/m olarak alınmıştır.

Verilen sistemin bağ çizgesi çizildikten sonra önemli matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\mathbf{S} = \text{diag} \left[ \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_3}, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 \right] \quad (7)$$



Şekil 1. Örnek kütle-yay-damper sistemi.

$$\mathbf{J}_{SS} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{J}_{SL} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{J}_{LL} = \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad (11)$$

$$\mathbf{J}_{LS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Hesaplanan bu matrisler ile sistem matrisi bulunur ve sistemin özdeğerleri hesaplanırsa aşağıdaki değerler elde edilir:

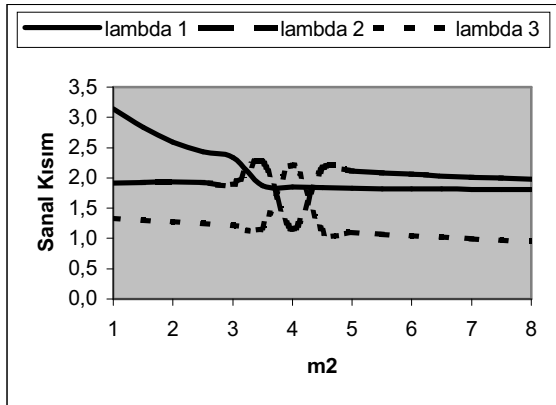
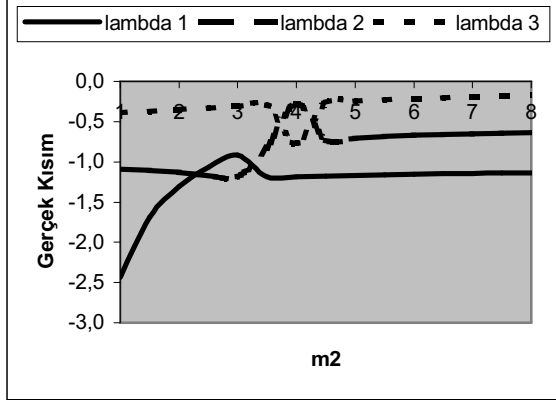
$$\lambda_{1,2} = -0.9182 \pm 2.3349i$$

$$\lambda_{3,4} = -1.1855 \pm 1.8977i$$

$$\lambda_{5,6} = -0.3130 \pm 1.2140i$$

Ayrıca sistemin etki matrisleri hesaplandıktan sonra  $\lambda_{1,2}$  özdeğerine en çok etki eden parametrelerin  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $k_2$ ,  $k_6$  değerlerinin olduğu görülmektedir (değerler sırasıyla 0.2805, 0.2022, 0.1487 ve 1.1195'dir).

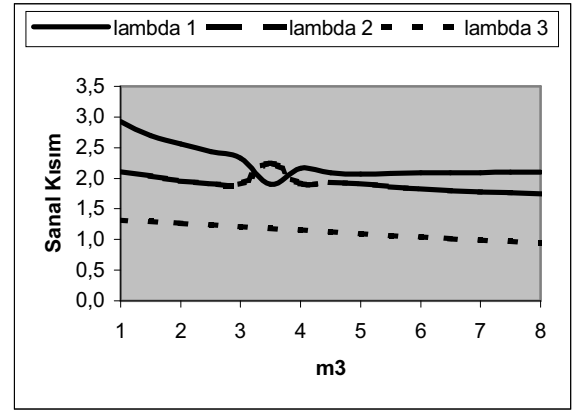
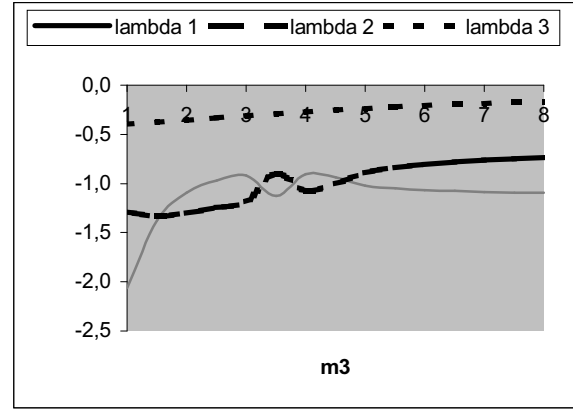
Bu parametreler için özdeğerlerin gerçek ve sanal kısımları parametrelerin değişimine göre ayrı ayrı çizilecek olursa Şekil 2, Şekil 3, Şekil 4 ve Şekil 5 elde edilmektedir.



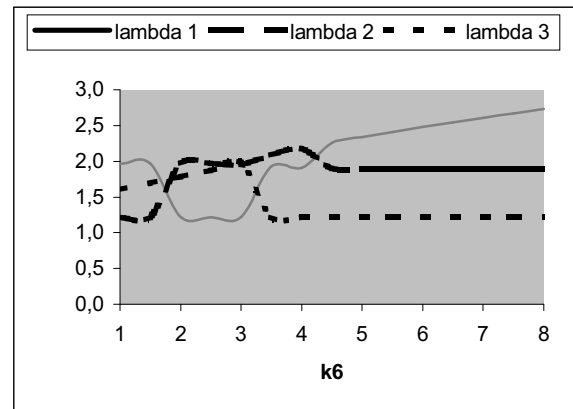
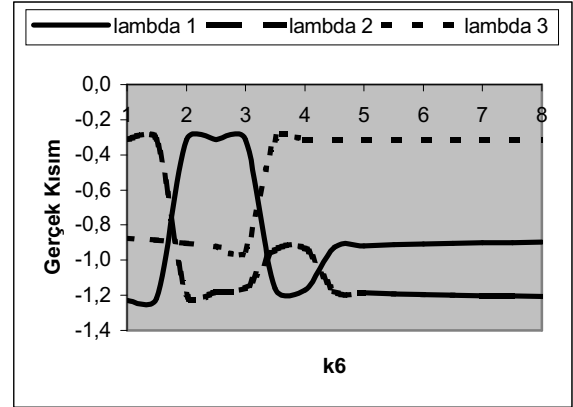
Şekil 2.  $m_2$  değeri ile özdeğerlerin değişimi.

Şekil 2 ve Şekil 3'den görülebileceği gibi  $m_2$  ve  $m_3$  kütlelerinin değişimi özellikle 3-5 kg değerleri arasında oldukça fazladır. Nominal değer olan 3 kg değerinde değişim başlamakta ve devam etmektedir. Bu değer için hesap yapıldığında etki matrisinin ilgili elemanlarının aynı satırda en yüksek değerde olması bu değişimi ifade etmektedir.

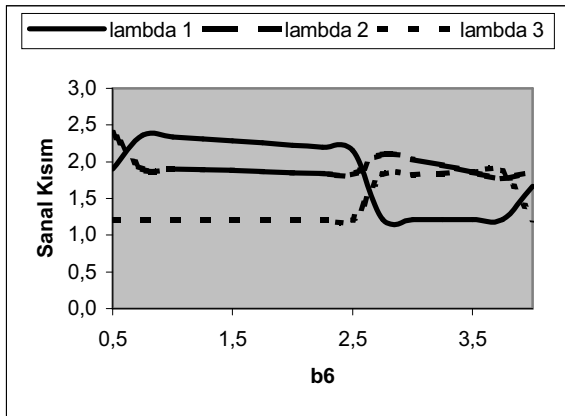
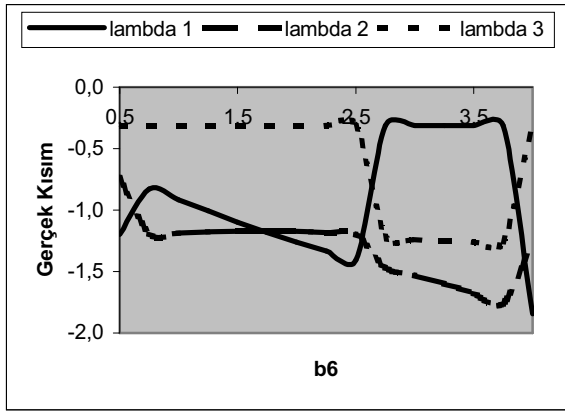
Ayrıca, nominal değerler için bütün özdeğerlerin değişimi incelendiğinde (Şekil 2, Şekil 3, Şekil 4, ve Şekil 5) değişim bölgelerinde özdeğerlerin tamamında gerçek kısımlar arttığında, sanal kısımların azaldığı ve tersinin de geçerli olduğu görülmektedir.



Şekil 3.  $m_3$  değeri ile özdeğerlerin değişimi.



Şekil 4.  $k_6$  değeri ile özdeğerlerin değişimi



Şekil 5.  $b_6$  değeri ile özdeğerlerin değişimi

#### 4. SONUÇLAR

Fiziksel sistem parametrelerinin özdeğerlere olan etkisinin incelenmesi hem teorik ve hem de pratik çalışma yapan mühendisler için önem taşımaktadır. Bu konuda parametre değerlerinin tek tek değişimlerini incelenmesi yerine nominal değerler için hesaplanan etki matrislerinin kullanılması kullanıcılara önemli bilgi sağlamakta ve sistem tasarımına kolaylıklar getirmektedir. Burada örnek olarak kullanılan sistemin benzetimi sonucunda elde edilen, özdeğerlerin aynı anda değişimlerinin incelenmesi ve bu değişimler için etki matrislerinden bilgi edinilmesinin sağlanmasının önemli bir araştırma konusu olduğu düşünülmektedir. Gelecek çalışmalarda bu matrislerin davranışının ve parametrelerle olan ilişkisinin detaylı bir şekilde incelenmesinin fiziksel sistemler hakkında daha fazla bilgiye ulaşılmasını sağlayacağına inanılmaktadır.

#### REFERANSLAR

- Decarlo R., R. Sacks (1981). *Interconnected Dynamical Systems*. Marcel Dekker Inc., New York, USA.
- Huang S.-Y., K. Youcef-Toumi (1997). Structural analysis for modeling and design of multi-energy domain dynamic systems. *Proceedings of the*

- IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, AIM97.
- Karnopp D. C., D. L. Margolis, R. C. Rosenberg (1990). *System Dynamics. A Unified Approach*, Second Edition. John Wiley & Sons, Inc. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.
- Orbak Â. Y. (1998). Physical domain model reduction for design and control of engineering systems. Mech. E. tezi, Massachusetts Institute of Technology, Makina Mühendisliği Bölümü.
- Orbak Â. Y. (2001). Fiziksel sistem modellerinin bond çizge yöntemi ile indirgenmesi. *Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi, TOK2001 Bildiriler Kitabı*, 69-74, Bursa.
- Orbak, Â. Y. (2002). Özdeğer-Özvektör Analizi ile Fiziksel Model İndirgenmesi. *Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı TOK'02 Bildiriler Kitabı*, 29-37.
- Orbak, A. Y., E. Eşkinat, O. S. Türkay (2004). Physical Parameter Sensitivity of System Eigenvalues and Physical Model Reduction. *Journal of the Franklin Institute*, **341(7)**, 631-655.
- Robertson G., I. Cameron (1997). Analysis of dynamic process models for structural insight and model reduction-Part 1. Structural identification measures. *Computers Chemical Engineering*, **21(5)**, 445-473.
- Rosenberg R. (1971). State-space formulation for bond graph models of multiport systems. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*.
- Ye Y., K. Youcef-Toumi (2000). Subsystem's influence on a system eigenvalue. *Proceedings of the IEEE Southeastcon 2000*, Nashville, TN, 261-267, USA.